Esercizio: Stabilire se le seguenti applicazioni sono omomorfismi di gruppi, monomorfismi o epimorfismi, ed determinarne, ove ciò abbia senso, nucleo e immagine.

g) $f:\mathbb{R}_+^* :\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^2$ ($\mathbb{R}_+^*$ denota l'insieme dei numeri reali positivi).

Svolgimento: L'applicazione f è un omomorfismo (endomorfismo) di gruppi moltiplicativi. In realtà è un isomorfismo, in quanto è un'applicazione bigettiva, poiché è invertibile con inversa definita da $x \mapsto \sqrt{x}$.

h) $f:\mathbb{Q}_+^* :\longrightarrow \mathbb{Q}_+^*$, $x \mapsto x^2$ ($\mathbb{Q}_+^*$ denota l'insieme dei numeri razionali positivi).

Svolgimento: L'applicazione f è un omomorfismo (endomorfismo) di gruppi moltiplicativi; è un monomorfismo, in quanto il suo nucleo è $\{1\}$. Non è un epimorfismo, dato che $2 \notin \mathrm{Im}(f)$.

i) $f:\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*,\ x \mapsto x^3$

Svolgimento: L'applicazione f è un omomorfismo (endomorfismo) di gruppi moltiplicativi; non è un monomorfismo, in quanto ogni elemento di $\mathbb{C}^*$ ha esattamente tre radici cubiche e quindi tre controimmagini rispetto a f. In particolare, $\mathrm{Ker} f = R_3$. Per lo stesso motivo, dato che ogni elemento di $\mathbb{C}^*$ ha almeno una radice cubica, f è un epimorfismo.

j) $f:R_5 :\longrightarrow R_5$, $x \mapsto x^3$ (R_5 denota l'insieme delle radici quinte dell'unità in $\mathbb{C}$).

Svolgimento: L'applicazione f è un omomorfismo (endomorfismo) di gruppi moltiplicativi; proviamo che è un monomorfismo. Anzitutto, se $x \in \mathrm{Ker} f$, allora $x^3 = 1$. Ma si ha anche $x^5 = 1$, dato che per ipotesi $x \in R_5$. Ne consegue che $1 = x^6 x^{-5} = x$. Ciò prova che $\mathrm{Ker} f = \{1\}$. Essendo f un'applicazione iniettiva tra due insiemi finiti della stessa cardinalità, ne consegue che f è anche surgettiva, ossia è un automorfismo. La sua inversa è $f^{-1}: R_5 :\longrightarrow R_5$, $x \mapsto x^2$. Infatti, per ogni $x \in R_5$, $\left(x^3\right)^2 = \left(x^2\right)^3 = x^6 = x^5 x = x$.

Osservazione: Dall'esercizio precedente risulta, in particolare, che l'applicazione $R_5 :\longrightarrow R_5$, $x \mapsto x^2$ è bigettiva. Ciò è, in realtà, parte di una proprietà generale.

Esercizio*: Sia G un gruppo moltiplicativo finito. Consideriamo l'applicazione $f: G \longrightarrow G$, $x \mapsto x^2$. Determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia un endomorfismo. In tali ipotesi, determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia un automorfismo.